

¿Cuál es el significado de la catenaria?

por Bruce Director

Uno ve un indicio del nivel de decadencia cultural actual, en el hecho de que el científico y el lego por igual generalmente desconocen la verdadera historia y los principios que implica el cálculo infinitesimal de Godofredo W. Leibniz. Es una cuestión de interés vital para el futuro de la ciencia y, más en general,



La cúpula de Brunelleschi en la iglesia de Santa María de Fiore en Florencia, Italia, se construyó entre 1420 y 1426. Brunelleschi se valió del principio de acción mínima de la catenaria como una guía para establecer la curvatura de los ladrillos y para estabilizar la estructura.

de toda la civilización, el remediar más bien pronto esta situación.

Por fortuna, este proceso ya está en marcha en el revolucionario programa educativo del movimiento internacional de juventudes de Lyndon LaRouche.

El significado de la curva catenaria surgió en tiempos modernos con la construcción de Filippo Brunelleschi de la famosa cúpula que corona la iglesia de Santa María de Fiore en Florencia, Italia. Construida entre 1420 y 1426, fue la mayor cúpula autoestable construida hasta entonces. Para construir la cúpula sin andamiaje, Brunelleschi aprovechó las propiedades de acción mínima de la cadena suspendida tanto para guiar la curvatura de los ladrillos como para estabilizar la estructura de la cúpula.

El triunfo de la construcción de la cúpula demostró que la cadena suspendida expresa un principio físico universal cuya investigación implica la pelea entre el exitoso método socrático de Johannes Kepler, Leibniz y Jean Bernoulli por un lado, y los métodos fracasados de Paolo Sarpi, Galileo Galilei y Leonhard Euler por el otro.

El descubrimiento de Kepler, y el problema de Kepler

En su descubrimiento de la naturaleza elíptica de las órbitas planetarias, Kepler dejó puesta la mesa para el desarro-

llo del cálculo infinitesimal. Kepler rechazó el método de Claudio Ptolomeo, Nicolás Copérnico y Tico Brahe, quienes abrazaban el dogma aristotélico de que era imposible conocer principios físicos, y de que la ciencia sólo puede ocuparse de la descripción matemática de las apariencias. Por consiguiente, Ptolomeo, Copérnico y Brahe, aunque tenían modelos matemáticos muy diferentes, todos aceptaban la restricción de que el movimiento planetario tenía que ajustarse a la acción circular perfectamente uniforme.

En el proceso de llegar a las órbitas elípticas en base a sus hipótesis físicas sobre la gravitación universal, Kepler demostró que el movimiento de un planeta siempre está cambiando. Ese cambio no se debía a ninguna propiedad innata del planeta, sino al efecto del principio de gravitación universal que actúa sobre él desde fuera del dominio de la percepción sensorial, a cada instante del accionar del planeta. Por tanto, la acción del planeta debía medirse como una función de este principio de cambio.

El intento de Kepler de resolver este problema lo llevó a formar su famoso principio de las áreas iguales. Pero, el enfoque de Kepler implicaba una paradoja. Kepler podía medir dónde había estado el planeta, pero el mismo método no podía medir dónde estaría. Este pro-



Niños exploran la catenaria y su relación con el arco en el museo Exploratorium de San Francisco, EU. (Foto: Susan Schartzzenberg/Exploratorium, www.exploratorium.edu).

blema, conocido como el problema de Kepler, requirió el desarrollo de una nueva forma de matemáticas, que fue la que Kepler pidió en *Nueva Astronomía*.

Fue el desafío de Kepler el que impulsó a Leibniz a desarrollar el cálculo infinitesimal. En colaboración con Bernoulli y Christiaan Huyghens, Leibniz aplicó su cálculo a la solución de muchos problemas físicos, tales como la catenaria.

El problema de la catenaria es un ejemplo de la superioridad del método de Leibniz sobre el neoristolismo de Sarpi, Galileo y demás. Galileo insistía

que la forma de la cadena suspendida era una parábola, porque la apariencia visible de la cadena y de la parábola eran similares. Sin embargo, las cuidadosas mediciones físicas de Joachim Jungius y el análisis posterior de Huyghens demostraron que Galileo estaba equivocado.

Huyghens y Jaques Bernoulli (el hermano de Jean) plantearon luego el reto de determinar el principio que gobierna a la cadena suspendida, mismo que Leibniz reconoció como una expresión de su principio de acción mínima universal. Leibniz y Bernoulli contribu-

yeron al descubrimiento del principio de la catenaria. Leibniz publicó su descubrimiento en *Acta eruditorum* en junio de 1661.

Al igual que Kepler —pero a diferencia de Galileo— Bernoulli consideró que la forma de la cadena suspendida sólo representaba los efectos de un principio físico universal invisible. Ese principio actúa sobre la cadena en cada punto infinitesimal. Bernoulli demostró que una ecuación diferencial puede expresar cómo actúa ese principio, en la forma del cálculo de Leibniz. No obstante, como reconoce Bernoulli, su ecuación diferencial para la curva catenaria no puede representarse mediante una expresión algebraica.

Leibniz, en su trabajo sobre esto, demuestra que la ecuación diferencial de Bernoulli puede expresarse como la media aritmética entre dos curvas exponenciales opuestas. Leibniz también demostró la conexión que hay entre esta expresión y la cuadratura de la hipérbola, de donde se desprende la ahora común denotación de la catenaria con el coseno hiperbólico.

Al igual que Sócrates, LaRouche ha puesto de manifiesto en la educación de su movimiento de juventudes, que la única forma de que un estudiante llegue a saber algo es reviviendo el descubrimiento original. Esto se logra, dice LaRouche, en grupos de discusión de no menos de 15 participantes, pero no más de 25.

La larga vida de la catenaria, de Brunelleschi a LaRouche

por Bruce Director

Lograr el urgente cambio necesario para pasar de ser una sociedad de consumo a una productora requiere, en lo fundamental, un cambio en la forma de pensar. La mente del consumidor conoce el universo sólo a través de los objetos que

estimulan los sentidos, y de los poderes mágicos que cree los controlan. Cuando enfrentan una crisis, como la actual, los consumidores se aterran. Exigen que un sacerdocio de asesores financieros y creadores de opinión cada vez más im-

potente actúe e, incapaces de aumentar la confianza del consumidor, no consiguen resultados. A medida que la crisis se profundiza, aumentan las sospechas de que las potencias invisibles en las que han confiado, o se quedaron sordas o

huyeron de la escena. Sin embargo, su principal error es pensar que tales fuerzas del mercado existieron alguna vez y, así, la *idea* de su existencia previa persiste y sigue gobernando los pensamientos y las acciones de los consumidores, y alimentando un pesimismo cada vez más desesperanzador.

Así eran las cosas en Florencia, Italia, cuando luego del desplome del sistema financiero feudal casi 80% de la población murió por los efectos de la peste negra, entre 1347 y 1350. El poeta florentino Giovanni Boccaccio, en la introducción de su obra *El Decamerón*, describe las reacciones de la población a esa crisis. Según Boccaccio, sus compatriotas se habían sumido en un estado de austera penitencia, de jarana bacanal, o de alguna otra forma de “preparación para el ‘número uno’”:

“Así, siempre adhiriendo a su inhumana decisión de esquivar a los enfermos tanto como fuera posible, ordenaron su existencia. En este extremo del sufrimiento y la congoja de nuestra ciudad, la venerable autoridad de las leyes, humanas y divinas, fue humillada, y todas se disolvieron por la ausencia de aquéllos que debían haberlas administrado y hecho cumplir, la mayoría de los cuales, como el resto de los ciudadanos, o estaban sordos o enfermos, o tan acondicionados a ser siervos que eran incapaces de desempeñar ninguna función con la cual cada hombre fuera libre de hacer lo correcto”.

En su intento de rescatar a su ciudad y a la civilización europea de esta tragedia, un grupo de líderes florentinos en la tradición cristiano-platónica de su predecesor, Dante Alighieri, reconoció que el poder de superar tales catástrofes radica, no en el dominio de la certeza sensorial y los poderes mágicos, sino en el poder de la mente humana de descubrir y emplear los principios veraces que gobiernan al universo. Para demostrar ese poder, decidieron terminar la catedral de Santa María de Fiore, cuya construc-

FIGURA 1



Catedral de Santa María de Fiore en Florencia, Italia.

ción había comenzado casi tres cuartos de siglo antes. El plan requería la construcción de un tambor octagonal de un diámetro enorme —42 metros—, que estaría coronado con una cúpula autoestable que se alzaría sobre la ciudad y dominaría todos los alrededores (ver **figura 1**).

Cuando en 1367 se decidió emprender este proyecto, el hombre que finalmente lo concretaría, Filippo Brunelleschi, ni siquiera nacía todavía; sin embargo, la intención que lo guiaría ya estaba plasmada en el tamaño de la estructura y en los requisitos de su diseño. La cúpula igualaría en tamaño al Panteón romano, ese templo dedicado a los poderes mágicos que habían dominado la opinión popular romana y bajo cuya autoridad los emperadores habían gobernado (ver **figura 2**). Desde su construcción en 128 d.C., bajo el mandato del emperador Publio Elio Adriano, el Panteón fue la mayor estructura cubierta del mundo, y aunque los emperadores ya no gobernaban en su nombre, la actitud de la cultura romana que simbolizaba persistió en el pensamiento de la población europea, la cual, en una condición bestial, vivía

subyugada por el temor a una oligarquía feudal.

La cúpula era un proyecto de un optimismo audaz. A diferencia del Panteón, la cúpula florentina sería bella tanto por dentro como por fuera; una cualidad dirigida a contrarrestar la persistente cultura panteónica que revivió la todavía reciente calamidad de la que Europa aún no se recuperaba. Nunca antes se había abovedado una estructura de tales dimensiones con una cúpula autosostenida y autoestable. Su belleza demostraría un principio compartido por la ciencia y el arte. Como tal, transformaría a toda la región circundante y, a través de los viajeros, al mundo entero.

Los diseñadores originales desconocían las implicaciones de los principios necesarios para construir la cúpula. Para lograr la hazaña, Brunelleschi tendría que descubrir, aplicar y comunicar una forma del principio de acción mínima universal, cuya posterior elaboración vendría en el transcurso de los siguientes 500 años. Este proceso dio un salto en 1988, cuando Lyndon LaRouche visitó la cúpula y reconoció las implicaciones de los descubrimientos

FIGURA 2

(a)



(b)



(a) Vistas exteriores del Panteón en Roma; y, (b) vista interior.

de Brunelleschi para los avances posteriores de Godofredo Leibniz, Carl Gauss y Bernhard Riemann, y para el desarrollo futuro de una nueva ciencia física.¹

La cúpula y la geometría antieclidiana

Imagínate en 1420 observando el tambor octagonal de Santa María de Fiore, sin la cúpula. ¿Qué ves? ¿Un espacio vacío? Si es así, nunca podrías imaginar, y mucho menos construir la cúpula. La construcción de la cúpula requirió un dominio de principios invisibles al ojo humano. No son los poderes mágicos e invisibles del Panteón, sino los principios físicos universales que, aunque invisibles, se conocen claramente a través de la imaginación. Tanto para el científico como para el artista, no hay tal cosa como un espacio vacío,

1. Nora Hamerman y Claudio Rossi, "Brunelleschi's Dome: The Apollo Project of the Golden Renaissance" (La cúpula de Brunelleschi: el Proyecto Apolo del Renacimiento de Oro), en *21st Century, Science & Technology*, edición de julio-agosto de 1989 (vol. 2, no. 4).

no existe un óleo vacío, ninguna pizarra en blanco. Lo que existe es una multiplicidad de principios físicos caracterizada por un conjunto de relaciones cuya expresión finalmente adopta la forma de una obra de arte. Para ver la cúpula sin construir, tal como el artista Brunelleschi habría hecho, imagina los principios físicos, y los ladrillos y el mortero cobrarán la forma requerida.

Esta es la base para empezar a construir una geometría física desde la perspectiva de Brunelleschi, Leibniz, Gauss, Riemann y LaRouche. Las raíces de esta geometría física se remontan a los descubrimientos —en la antigua Grecia— de Tales, Pitágoras, Arquitas, Platón, Menecmo, Arquímedes y Eratóstenes, quienes —a diferencia de la exposición de los *Elementos* de Euclides— derivaron los principios de la geometría de la investigación de los principios físicos, no de nociones abstractas de espacios vacíos.

Desde el asesinato de Arquímedes a manos de soldados romanos en 212 a.C., el pensamiento europeo estuvo dominado por la doctrina de Aristóteles de que

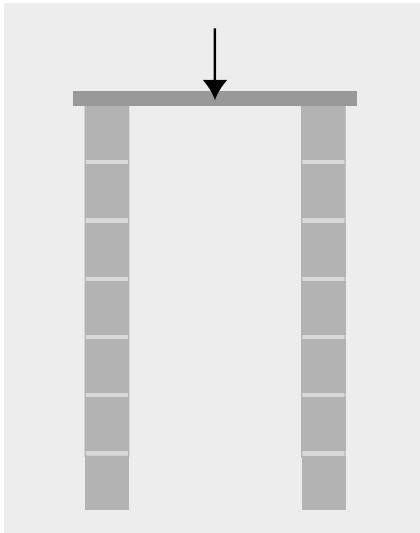
los principios universales no tienen efecto sobre los asuntos terrenales, y de que el conocimiento de tales principios es imposible. Por tanto, los seres humanos sólo podían confiar en la percepción sensorial y en las proposiciones de una geometría abstracta derivada, por deducción, de axiomas y opiniones comunes que no pueden comprobarse, los cuales estaban separados del mundo físico, del mismo modo que —según Aristóteles— los cielos estaban separados de la Tierra. Para construir la cúpula, Brunelleschi tuvo que rechazar el aristotelismo y recurrir a la ciencia platónica, la cual entendía que al mundo físico lo gobernaban principios físicos universales, y que, aunque visibles, la mente humana tenía el poder de descubrirlos y usarlos, aumentando así el poder del hombre en y sobre el universo.

Los principios físicos vs. Aristóteles

Para comprender esto, examina algunos problemas simples de la construcción de edificios en los que destaca la distinción entre los principios físicos de la gravitación universal y las nociones aristotélicas de la geometría abstracta. Comienza con una columna vertical, la cual adopta la forma de una línea. Según Euclides, una línea geométrica abstracta es una extensión en un espacio vacío que sólo tiene longitud. No importa cuán larga sea la línea, su anchura es siempre la misma, es decir, cero. Sin embargo, cuando construimos una columna (línea) vertical de ladrillos, entre más alta es la columna mayor es el peso (presión) que ejerce sobre los ladrillos inferiores. Construir una columna más alta requiere fortalecer las porciones inferiores de la columna ensanchando la base, o usando otros métodos tales como apuntalar la columna desde fuera.

Traslada esta idea a un área o superficie. Desde la perspectiva del espacio vacío euclidiano, una superficie es algo que tiene longitud y ancho. Un área circunscrita está delimitada por una línea, ya sea recta o curva. Sin embargo, a un área física la delimita una estructura física cuya forma debe estar determina-

FIGURA 3



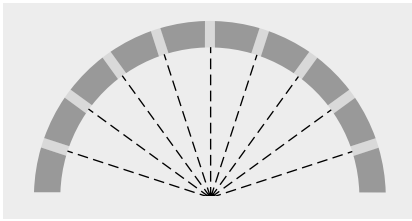
Área vertical delimitada por dos columnas y un techo plano. El techo sólo es fuerte cerca de las columnas; en medio es débil.

da por principios físicos. Una propuesta para delimitar un área física sería construir dos columnas verticales y conectar esas columnas con un techo. Pero ésta es una estructura relativamente débil, porque el techo sólo es fuerte cerca de donde se apoya en las columnas. Cuanto más alejadas se encuentran las columnas, mayor la debilidad del techo (ver **figura 3**). Un arco es una estructura mucho más estable para albergar un área vertical.

A primera vista, el círculo parece ser la clase más simple de arco, pues el límite circular encierra la mayor superficie en el menor perímetro. Puede construirse un arco circular relativamente estable si el arco está diseñado de forma tal que todos los ladrillos apunten hacia el centro del círculo (ver **figura 4**). Sin embargo, mientras el arco está en construcción no puede sostenerse por sí mismo y necesita un andamiaje temporal que lo sostenga. Así, el arco entero se autosostiene, pero sus partes no pueden sostenerse por sí solas.

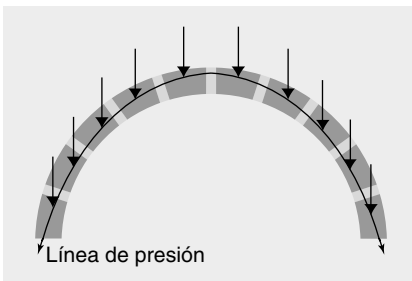
El arco circular presenta otro problema. A pesar de encerrar la mayor superficie en el menor perímetro, su altura

FIGURA 4



En un arco circular todos los ladrillos apuntan al centro del semicírculo.

FIGURA 5



En un arco circular la fuerza de gravedad que recae sobre los ladrillos no se corresponde con la línea de presión a lo largo del arco. Por tanto, la parte superior tiende a desplomarse y los lados a abrirse.

es una función de su ancho y la línea de presión no se amolda a la curva circular (ver **figura 5**). La única forma de encerrar una superficie de mayor altura es ampliando el arco, lo cual, a su vez, disminuye la estabilidad total de la estructura por la presión que ejercen los ladrillos superiores hacia abajo, empujando los lados del arco hacia fuera. Así, aunque desde el punto de vista de la geometría abstracta el círculo es isoperímetro, desde el de la geometría física hay otra forma que proporciona una mayor estabilidad para una superficie mayor. La forma que logra esto es un arco apuntado u ojival, en el cual las dos curvas que lo forman son circulares y tienen distintos centros (ver **figura 6a**). El arco apuntado, no sólo encierra una superficie mayor, sino que tiene mayor estabilidad porque su curvatura se ajusta más a

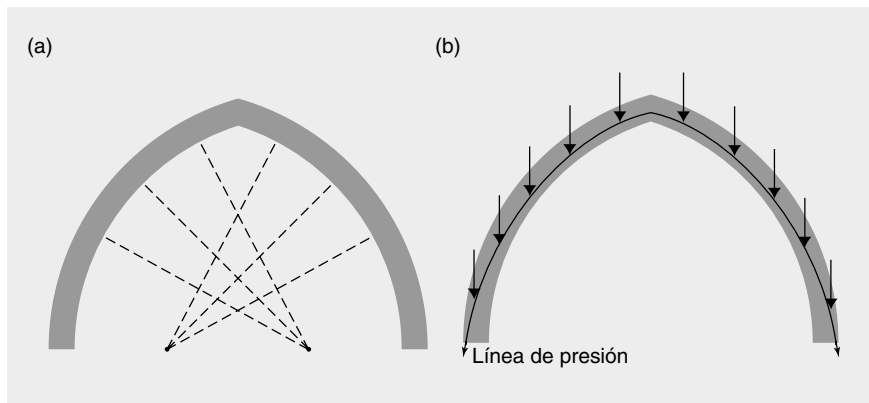
la línea física de la fuerza en la estructura (ver **figura 6b**). Así, la forma de un arco en una construcción no la determinan las características de la geometría abstracta, sino las de la geometría física.

Pero, Brunelleschi tuvo que construir más que un arco, tuvo que encerrar un volumen. En términos geométricos, a un volumen lo encierra un área, la cual se produce al mover una curva. Por ejemplo, en la famosa construcción de Arquitas, cuando se mueve un círculo a lo largo de una línea se produce un cilindro, cuando se rota alrededor de un punto se obtiene un toro, cuando se rota alrededor de una línea se crea una esfera, y cuando se rota un triángulo alrededor de una línea se produce un cono (ver **figura 7**). De este modo, una cúpula puede formarse rotando un arco, ya sea circular o apuntado, alrededor de un eje (ver **figura 8**). Pero un área física, como una cúpula, no es sólo la suma de un número infinito de arcos rotados, porque surgen nuevas fuerzas en la cúpula que no existen en ninguno de los arcos. Además de la fuerza a lo largo del arco (que va de arriba a abajo, es decir, que es “longitudinal”), existen fuerzas *alrededor* de la cúpula (“circunferenciales” o “arqueadas”). El problema que uno enfrenta cuando construye una cúpula radica en determinar qué forma distribuye estas fuerzas diferentes de la mejor manera, según los principios de la gravitación universal.

Una solución, la cúpula hemisférica, basada en el arco circular, encierra el mayor volumen dentro de la menor superficie. Pero, al igual que en el arco circular, la altura de la cúpula hemisférica es una función de su ancho. Para poder construir cúpulas más altas, los arquitectos islámicos adaptaron el principio del arco apuntado a la forma de una cúpula apuntada. Al igual que el arco apuntado, la cúpula apuntada no sólo es más alta, sino más estable, pues distribuye las fuerzas en la dirección de la fuerza de gravedad.

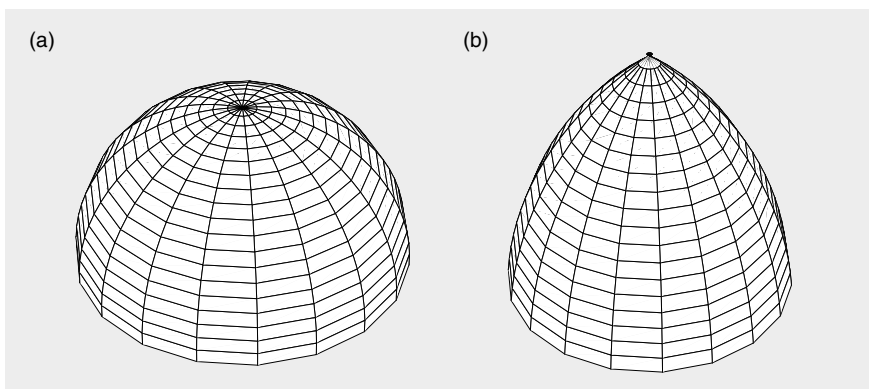
No obstante, nadie había construido una cúpula del tamaño de la que Brunelleschi proponía. Por tanto, tuvo que di-

FIGURA 6



(a) En un arco apuntado u ojival cada lado es el arco de un círculo, pero los centros de los arcos difieren. Esto hace que un arco apuntado sea más alto que uno circular. (b) En un arco apuntado la fuerza de gravedad se ajusta mejor a la línea de presión, distribuyendo la presión de las fuerzas a lo largo del arco hacia el suelo.

FIGURA 8



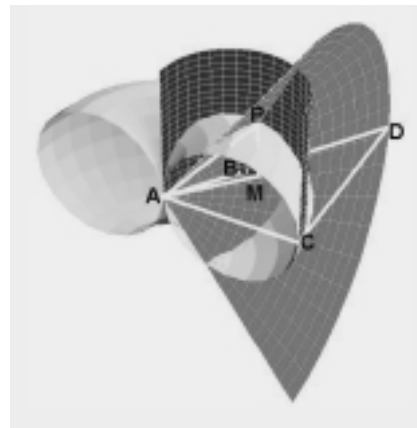
(a) Una cúpula hemisférica se forma rotando un arco circular; y, (b) una cúpula apuntada se forma rotando un arco apuntado. En las estructuras físicas, las cúpulas, a diferencia de los arcos, soportan fuerzas longitudinales descendentes, y también fuerzas circunferenciales hacia afuera.

señar una estructura cuya forma equilibrara estas fuerzas sin necesidad de apuntalamiento externo, pues minaría la belleza de la cúpula y, así, su eficacia para transformar a la sociedad elevando las mentes de la población.

Brunelleschi enfrentó un problema adicional. Una cúpula, al igual que un arco, por lo general necesita un andamiaje de soporte o una cimbra que la sostenga mientras dura su construcción.

Aquí, Brunelleschi encaró el obstáculo más formidable. La cúpula propuesta para Santa María de Fiore era tan grande, que excedía la disponibilidad de madera para construir el andamiaje. Brunelleschi sorprendió a sus competidores al proponer construir la cúpula sin ninguna cimbra. Este paso audaz hizo que Brunelleschi diseñara la cúpula de tal forma que, de conjunto y en cada una de sus partes, se autosostuviera. Semejante

FIGURA 7



Arquitas demostró que la solución al problema de doblar el cubo, o de encontrar dos medias geométricas entre dos extremos, podía resolverse en la intersección de un cilindro, un toro y un cono.

forma no podía determinarse con los métodos asociados con la geometría euclidiana; la forma que necesitaba Brunelleschi sólo podía determinarse mediante principios físicos.

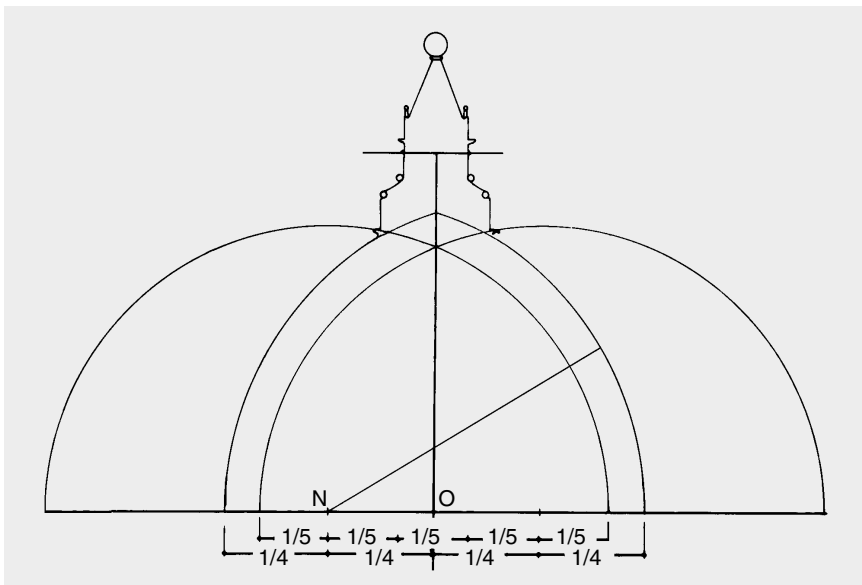
La construcción de la cúpula

Brunelleschi propuso la construcción de dos cúpulas, una dentro de la otra, con una escalera entre ellas. Ambas se amoldarían al arco apuntado del diseño original. Sin embargo, según el arquitecto moderno Lando Bartoli,² la curva de la cúpula interior se basaba en un círculo cuyo diámetro era cuatro quintos del diámetro interno del tambor octagonal (una “quinta apuntada”), en tanto que la curva de la cúpula exterior debía ser tres cuartas partes del diámetro exterior (una “cuarta apuntada”; ver **figura 9**).

Como tenía que evitar el uso de una cimbra, Brunelleschi tuvo que controlar con mucho cuidado la forma de ambas cúpulas mientras se construían. Ello implicó controlar tres curvaturas diferentes: la longitudinal, la circunferencial y la interior que va hacia el centro de la cúpula. Si las tres curvaturas podían

2. *Ibid.*

FIGURA 9



Los planos exigían que la cúpula fuera apuntada. Según el arquitecto Lando Bartoli, los centros de curvatura de ambas cúpulas (la interior y la exterior) son los mismos (N). Sin embargo, el radio de curvatura de la cúpula interior representa 4/5 partes del diámetro interior (una quinta apuntada), en tanto que el radio de curvatura de la cúpula exterior representa 3/4 partes del diámetro exterior (una cuarta apuntada).

controlarse durante las diferentes fases de construcción, la cúpula no sólo sería estable una vez terminada, sino que cada fase sería lo bastante estable como para servir de plataforma de construcción para la siguiente. Esto significaba que la cúpula tenía que ajustarse a una forma que pudiera autosostenerse *tanto de conjunto como en cada una de sus partes*.

Cada dirección de curvatura la determinaba otra curvatura. La curvatura longitudinal desde la linterna hasta el tambor estaba definida por el diseño de la quinta y la cuarta apuntada, tal como lo expresan los ocho nervios primarios (blancos) y una serie de nervios intermedios (invisibles, incrustados). Mientras que cada nervio es un arco circular, los centros de la curvatura de cada uno son diferentes; todos los centros yacen a lo largo de dos círculos (uno para la cúpula interna y otro para la externa) dentro de la base del tambor. (ver **figura 10**). La curvatura circunferencial también era aproximadamente circular, y el diáme-

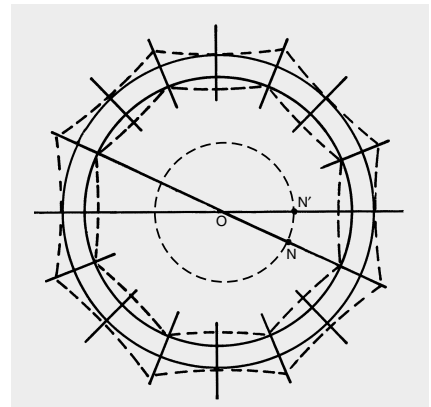
tro de cada círculo disminuía con la altura. Los centros de curvatura de los círculos yacen en una línea que se extiende desde el centro del tambor hasta la linterna. Asimismo, cada hilera de ladrillos debía torcerse cada vez más hacia adentro a medida que las hileras llegaban a la punta (ver **figura 11**). Este ángulo tenía que ser uniforme en cualquier hilera, pero debía variar de hilera en hilera en una proporción precisa, pero no uniforme.

Brunelleschi tuvo que resolver un sin fin de problemas, y cada uno de ellos requería nuevas ideas revolucionarias. Pero el descubrimiento central con el que logró tener éxito, el de mayor importancia para el desarrollo futuro de la geometría física antieuclediana de Kepler, Fermat, Leibniz, Gauss y Riemann, es el que LaRouche identificó: el principio de la catenaria.

El principio de la catenaria

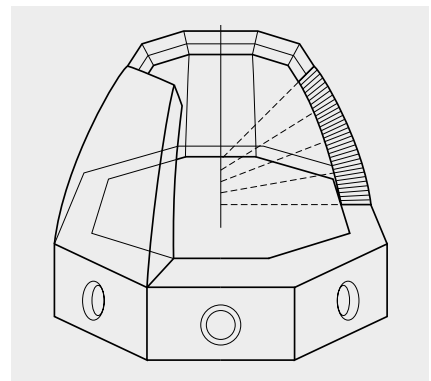
Una cadena que cuelga libremente cobra una forma única que, al igual que

FIGURA 10



Todos los centros de curvatura, tanto de la cúpula interna como de la externa, yacen en el mismo círculo NN', cuyo centro es O. (Plano de Claudio Rossi, posterior al de Lando Bartoli).

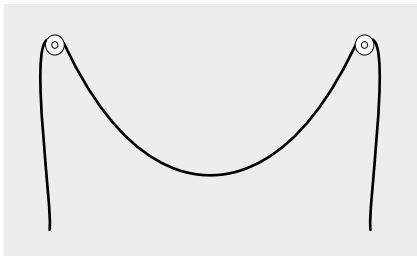
FIGURA 11



Los centros de cada hilera (aproximadamente circular) de ladrillos yacen en la misma línea que va de la linterna al centro del tambor. Cada hilera de ladrillos se orienta hacia adentro en un ángulo cada vez más agudo.

la cúpula de Brunelleschi, se sostiene por sí misma y a cada una de sus partes. Esto puede demostrarse de forma experimental colgando una cadena entre dos poleas que puedan moverse con libertad (ver **figura 12**). La cadena encontrará sólo una "órbita" o trayectoria estable entre las poleas, pero, una vez que la encuentra, es muy estable. Esta es la característica que LaRouche ha compara-

FIGURA 12



La catenaria es la forma que cobra una cadena suspendida de grosor uniforme. Cuando una cadena pende de poleas, de modo que puede moverse con libertad, la única curva en que la cadena está estable es la catenaria.

do con el principio del “movimiento congelado” de la escultura clásica griega. Si las posiciones de las poleas cambian, la cadena entera se reorienta sola para adoptar de nuevo una forma catenaria.

Aunque la Grecia antigua y Brunelleschi ya conocían esta característica, los principios subyacentes no se dominaron a cabalidad sino hasta que Godofredo Leibniz y Jean Bernoulli los descubrieron un siglo más tarde. Usando el cálculo de Leibniz, demostraron que la

forma catenaria de la cadena era la forma que equilibraba la tensión física en cada punto de la misma (ver figura 13). Es más, Leibniz demostró que este principio físico correspondía a las funciones trascendentales elementales: la circular, la hiperbólica y la logarítmica (ver figura 14).

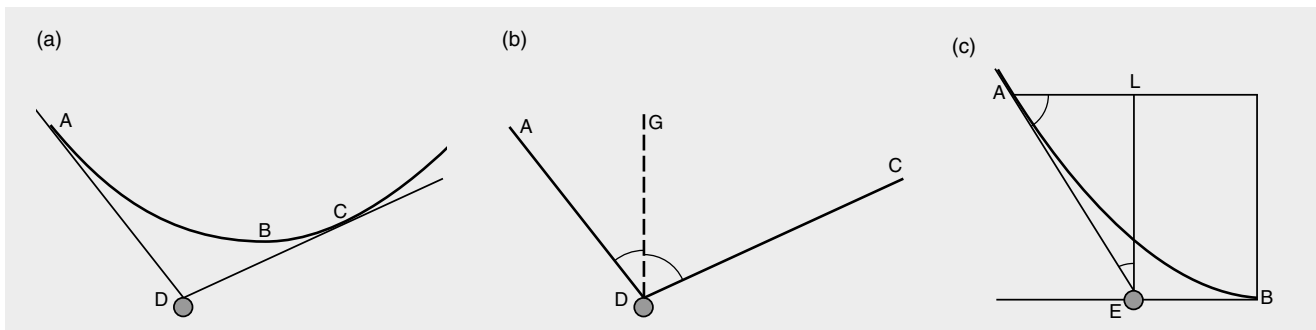
Regresa a nuestra comparación previa de la diferencia que hay entre las nociones geométricas abstractas de línea, área y volumen, y los requisitos físicos de la construcción de una columna, un arco y una cúpula. Tal como ya está implícito en el concepto de “poderes” desarrollado por Pitágoras, Arquitas, Platón, etc., incluso los conceptos geométricos de línea, área y volumen están determinados por la clase de principios físicos que, como Leibniz demostró, expresa la catenaria. La opinión aristotélica de que las líneas, las áreas y los volúmenes son entidades geométricas abstractas separadas de los principios físicos universales que las generan, es tan falsa como la fe en los poderes mágicos del panteón romano.

Brunelleschi usó una cadena suspendida para guiar el desarrollo de la curvatura de la cúpula en cada etapa de su construcción. A medida que se colo-

caba cada hilera de ladrillos, una cadena colgaba entre los nervios intermedios para guiar la curvatura. Así, la forma general de la cúpula la determinaba, no una curvatura definida por las matemáticas abstractas, sino un principio definido en términos físicos. Del mismo modo que una cadena suspendida se sostiene a sí misma de conjunto y en cada una de sus partes, la cúpula, cuya curvatura la guiaba la curvatura de la cadena suspendida, es una superficie que también se autosostiene de conjunto y en cada una de sus partes.

Aquí hago una advertencia a aquellos aristotélicos que exigen “ver” la forma física de la catenaria en la figura final de la cúpula. Aunque Brunelleschi usó una forma del principio de acción mínima que Leibniz y Bernoulli descubrieron después, los rasgos de la cúpula no adoptan la forma de una cadena suspendida. Más bien, es el principio de acción mínima expresado en la cadena suspendida, del modo que ese principio se desarrolló después en la teoría de superficies de Gauss, en la teoría de multiplicidades de Riemann y en los principios de la economía física de LaRouche, el que le dio su forma a la cúpula. En “Believing Is Not Necessarily Knowing”

FIGURA 13



(a) Bernoulli demostró que la curva que forma una cadena suspendida está determinada por principios físicos. El punto inferior de la cadena representaba la singularidad en torno a la cual se orientaba toda la cadena (punto B). La fuerza que ejerce la gravedad en dos puntos cualesquiera A y C a los lados opuestos del punto inferior, equivale a la fuerza ejercida por un peso simple en el punto D, el cual, a su vez, equivale al peso de la cadena suspendida entre A y C a partir de los hilos tangentes a la catenaria en esos dos puntos. (b) Bernoulli midió la fuerza en A y C como proporcional al seno de los ángulos que forman las tangentes y la línea vertical trazada desde su punto de intersección en D. En la ilustración, la fuerza en A es proporcional al seno del ángulo CDG, y la fuerza en C es proporcional al seno del ángulo ADG. (c) Usando el cálculo de Leibniz, Bernoulli demostró que la catenaria era la curva que mantenía el principio físico expresado en (a) y (b). Así, en tanto el punto A se aleja en forma horizontal del punto inferior B, también se eleva en forma vertical a un ritmo creciente, tal que los senos de los ángulos AEL y EAL son proporcionales.

(Crear no necesariamente implica saber)³ LaRouche explica su descubrimiento:

“Podemos ilustrar esta conexión de forma apropiada con un caso que seguido he mencionado, desde 1988: la lección que debemos aprender de la exitosa construcción de Brunelleschi de la famosa cúpula de la Catedral de Santa María de Fiore, en Florencia. Y sigo remarcando ese ejemplo, no sólo porque logré redescubrir en 1987–88 un principio que Brunelleschi usó, a sabiendas de que tendría éxito, en efectuar un proceso de construcción que se creía físicamente imposible. El principio que usó para asegurar ese éxito fue el mismo principio de la catenaria que Leibniz, más de dos siglos después, identificó por primera vez como la expresión del principio universal de la acción física mínima. Aquí, el arte y la ciencia se convirtieron en el mismo principio. El proceso ‘imposible’ de construcción realizado fue una demostración del principio de la verdad, que también se expresó como tal en el triunfo de la ciencia y el arte cristiano platónico sobre la tradición y los símbolos panteónicos falsos del romanticismo latino.

“El principio de acción mínima de Leibniz, el cual es la base de su descubrimiento de los logaritmos naturales, se expresa en la función catenaria, que es la curva física de ‘la cadena suspendida’ creada por una acción física. La escultura griega clásica prerromana reflejó esta curva como el principio del movimiento continuo capturado a medio movimiento, del modo que John Keats nos muestra esta equivalencia entre la

verdad y la belleza en su ‘Oda a una urna griega’.

“De nuevo, ¡la verdad es un asunto de método! En este caso, la verdad de la cúpula como método de arte, y la verdad de la cúpula como método singular de un principio físico en su construcción exitosa, coinciden. Para lograr esculpir una figura capturada a medio movimiento, la mente del escultor tiene que sentir el impacto de lo que Leibniz definió como un principio físico de acción mínima universal, tanto como Brunelleschi confió en el uso de la catenaria en la forma de una cadena suspendida (una forma de materia en movimiento aun cuando parece estar inmóvil), que dio pie al proceso de construcción de la doble pared de la cúpula. El meollo no estribaba en que la cúpula terminada reflejara la forma catenaria, sino en que la capacidad de construir esas paredes dependía del principio de acción expresado en todas y cada una de las fases del proceso de construcción de la cúpula aun por terminar”.

La belleza de la cúpula demuestra lo veraz del descubrimiento de Brunelleschi. Sin embargo, se necesitarían los descubrimientos de Kepler, Fermat, Leibniz, Gauss, Riemann y LaRouche para comprender a cabalidad el principio subyacente.

El desarrollo de la idea física de la forma

El éxito de la construcción de la cúpula de Brunelleschi demostró que los principios arquitectónicos de la geometría física en los que se basaba eran universales. Esta perspectiva la expresó Johannes Kepler, quien 150 años después escribió, en *Mysterium cosmographicum*, sobre la construcción del sistema solar.

“Percibimos la forma en que Dios, como uno de nuestros arquitectos, centró la tarea de construir

el universo con orden y ejemplo, y colocó las partes individuales en la forma debida, como si lo que imitaba a la *naturaleza* no fuera arte, sino que Dios mismo había examinado el modo de construir al *hombre* que debía ser”.

Kepler, en esa obra, y luego en *Nova astronomía y Harmonices mundi*, descubrió que la forma del sistema solar, al igual que la de la cúpula, no estaba determinada por consideraciones matemáticas abstractas (que hubieran indicado órbitas perfectamente circulares), sino por principios armónicos físicamente determinados. Así, las órbitas planetarias elípticas, al igual que la cúpula de Brunelleschi, tenían el tamaño y la forma necesarios para poder expresar las relaciones armónicas de esos principios físicos.

Esta idea físicamente determinada dio otro paso en su desarrollo cuando Pierre de Fermat estableció que la forma de la trayectoria de la luz estaba determinada por el principio del tiempo mínimo, como lo expuso en su “Método de investigación del máximo y el mínimo”:

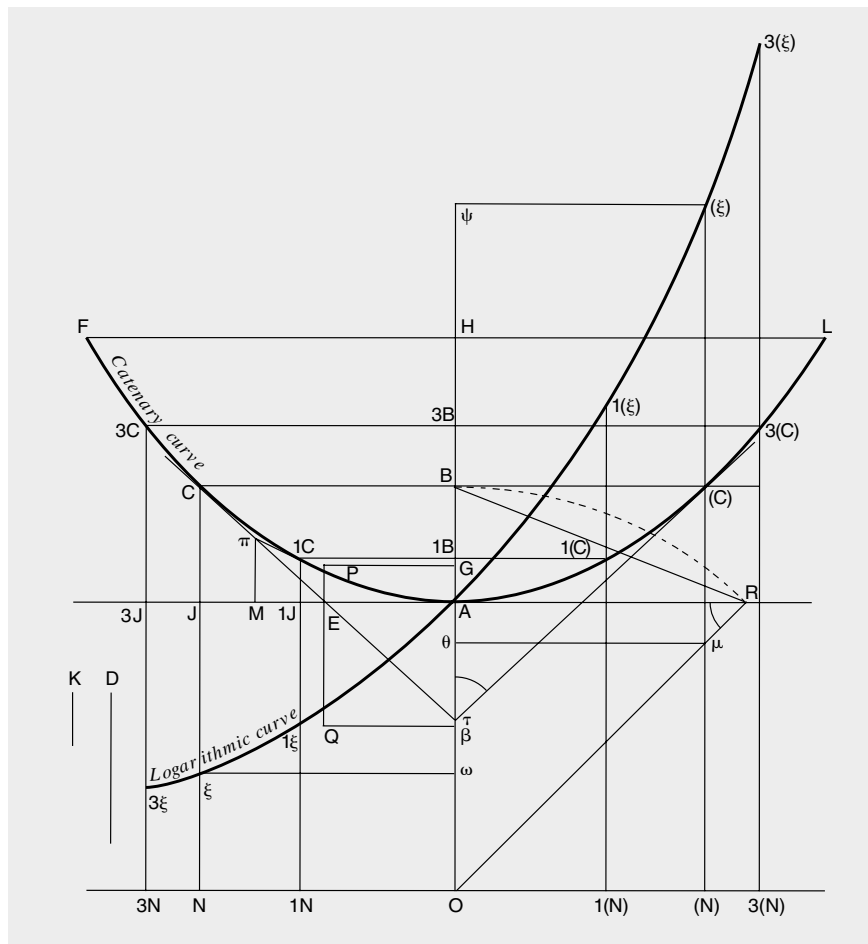
“Nuestra demostración se basa en un solo postulado, el de que la *naturaleza* obra a través de los métodos y senderos más fáciles y convenientes. Así, creemos que el postulado debería ser afirmado —y no como se hace de costumbre— al decir que la *naturaleza* siempre obra a través de las líneas más cortas. . . No buscamos los espacios o las líneas más cortas, sino aquéllas que pueden atravesarse con mayor facilidad, conveniencia y en el menor tiempo” (ver **figura 15**).

Leibniz, siguiendo los descubrimientos de Kepler y Fermat, generalizó estos descubrimientos en la forma de un principio de acción mínima universal en su *Discurso de metafísica*:

“El Arquitecto de todas las cosas creó la luz de tal forma que

3. Lyndon H. LaRouche, “Believing Is Not Necessarily Knowing” (Crear no necesariamente es saber), en *Executive Intelligence Review* del 17 de enero de 2003 (vol. 30, no. 2).

FIGURA 14



Leibniz demostró que el principio físico descubierto por Bernoulli se expresaba en la media aritmética entre dos curvas, a las que llamó “logarítmicas”.

“Dados una línea recta indefinida ON paralela al horizonte, y OA , un segmento perpendicular igual a $O3N$, y sobre $3N$ un segmento vertical $3N\xi$, que, con OA , mantiene la proporción de D con K ,

encuéntrese la media proporcional $1N1\xi$ (entre AO y $3N3\xi$); luego, entre $1N1\xi$ y $3N3\xi$; luego, a su vez, encuéntrese la media proporcional entre $1N1\xi$ y OA ; mientras continuamos de este modo en la búsqueda de segundas medias proporcionales, y, a partir de ellas, terceras proporcionales, sígase la curva $3\xi-1\xi-A-1(\xi)-3(\xi)$, de modo que, cuando se toman los intervalos equivalentes $3N1N$, $1NO$, $O1(N)$, $1(N)3(N)$,

etc., las ordenadas $3N3\xi$, $1N1\xi$, OA , $1(N)1(\xi)$, $3(N)3(\xi)$, se encuentran en una progresión geométrica continua, haciendo contacto con la curva que por lo regular identifico como logarítmica. Así, al tomarse a ON y $O(N)$ como iguales, elévese sobre N y (N) los segmentos NC y $(N)(C)$, que son iguales a la semisuma de $N\xi$ y $(N)(\xi)$, tal que C y (C) serán dos puntos de la curva catenaria $FCA(C)L$, sobre la que puede determinarse geoméricamente tantos puntos como se deseen.

“Y viceversa, si la curva catenaria se construye de forma física, suspendiendo una cuerda o una cadena, pueden construirse a partir de ella tantas medias proporcionales como se quieran, y encontrarse los logaritmos de los números, o los números de los logaritmos. Si se busca el logaritmo del número $O\omega$, esto es, el logaritmo de la proporción entre OA y $O\omega$, donde OA (que escogí como unidad, y que también llamaré parámetro) se considera igual a cero, debe tomarse la tercera proporcional $O\psi$ de $O\omega$ y OA ; luego, escójase la abscisa como la semisuma de OB desde $O\omega$ y $O\psi$, y la ordenada correspondiente BC u ON sobre la catenaria será el logaritmo que se busca correspondiente al número propuesto. Y de forma recíproca, si el logaritmo ON está dado, debe tomarse el doble del segmento vertical NC que se desprende de la catenaria, y cortarse en dos segmentos cuya media proporcional debe ser igual a OA , que es la unidad dada (es un juego de niños); los dos segmentos serán los números buscados, uno mayor y el otro menor que 1, correspondiendo al logaritmo propuesto”.

—G.G. Leibniz, “Dos documentos sobre la curva catenaria y la curva logarítmica”, de la revista “Acta Eruditorum”, 1691 (ver Fidelio, número de la primavera de 2001, vol. X, núm. 1).

este resultado más bello nace de su misma naturaleza. Esa es la razón por la cual aquellos que rechazan la existencia de *causas finales en la física*, como Descartes, cometen un gran error, porque aparte de revelar las maravillas de la sabiduría divina, dichas causas finales nos hacen descubrir un principio muy bello, junto a las

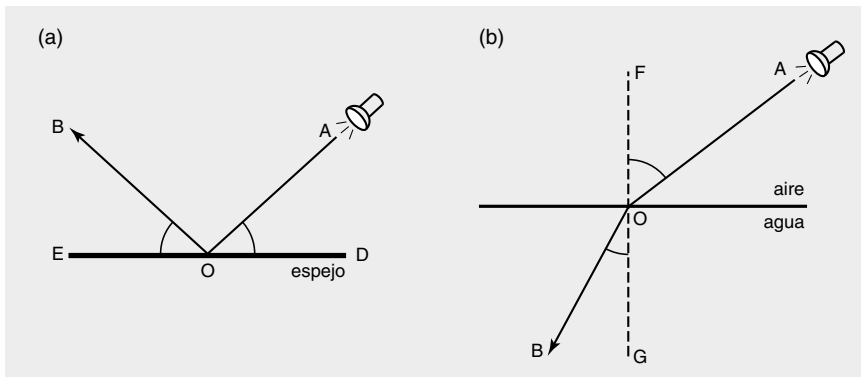
propiedades de cosas cuya naturaleza aún no percibimos con claridad, y que tenemos el poder de explicar y utilizar, de modo que podemos tener la facultad de explicarlas, junto con sus artefactos, tal como el Creador las usó para producir sus resultados, y para determinar sus fines. De esto debe comprenderse que las meditacio-

nes de los antiguos sobre dichas cuestiones no deben tomarse a la ligera, como cierta gente piensa en la actualidad”.

De las trayectorias a las superficies

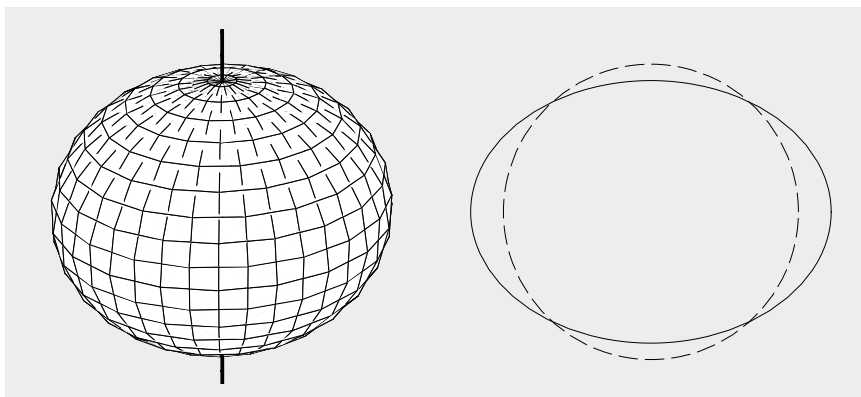
La cúpula de Brunelleschi muestra el camino hacia un desarrollo más elaborado del principio de acción mínima

FIGURA 15



(a) Cuando la luz se refleja en un espejo, el ángulo de incidencia AOD y el de reflexión BOE son iguales. Esto convierte a la trayectoria de la luz AOB en la de la distancia más corta. (b) Cuando la luz pasa de un medio a otro, como por ejemplo del aire al agua, disminuye su velocidad y se refracta (se dobla), de forma que el seno del ángulo de incidencia AOF y el seno del ángulo de refracción BOG mantienen una proporción constante. Fermat demostró que esta trayectoria AOB no es la de menor distancia, sino la del menor tiempo.

FIGURA 16



La rotación de la Tierra sobre su eje provoca que se alargue en el ecuador y se aplane en los polos, lo que le da una forma elipsoidal.

universal. Las órbitas planetarias, la trayectoria de la luz y las catenarias son todas trayectorias; es decir, curvas. La cúpula de Brunelleschi es una *superficie* de acción mínima.

Los conceptos necesarios para comprender las implicaciones de esta distinción los desarrolló Gauss, quien, remontándose a los descubrimientos de Kepler, Fermat y Leibniz (como hemos hecho nosotros), desarrolló los fundamentos de una teoría física de superficies.

El marco del descubrimiento de Gauss fue su medición de la superficie de la Tierra, la cual, por estar físicamente determinada, y en congruencia con el principio de Leibniz, tiene que ser una superficie de acción mínima. Por más de 20 años, Gauss hizo mediciones astronómicas y geodésicas de la Tierra. Las consideraciones de la geometría abstracta sugerirían que la Tierra es una esfera perfecta, ya que la esfera encierra el mayor volumen en la menor área. Pero

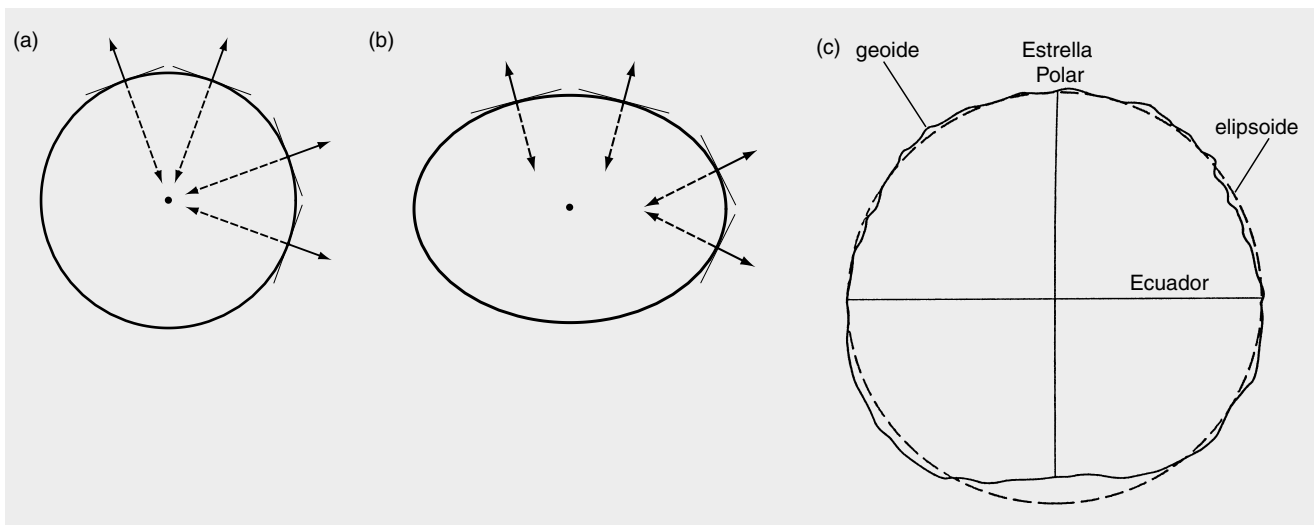
como la Tierra es un cuerpo que rota en el sistema solar, su forma física no es esférica sino elipsoidal (ver **figura 16**). Sin embargo, las mediciones de Gauss determinaron una discrepancia entre la forma geométrica de una elipsoide y la forma física de la Tierra (ver **figura 17**). Esto lo llevó a descubrir que la forma física de la Tierra no era elipsoidal, sino algo más irregular. Gauss identificó la “forma geométrica de la Tierra, como esa forma que es perpendicular a la fuerza de gravedad por todas partes”. En otras palabras, Gauss, al igual que Leibniz antes con respecto a la catenaria, no trató de ajustar la Tierra a una forma sacada de los libros de texto de las matemáticas abstractas; más bien, inventó una nueva geometría que se amoldó a las características físicas de la Tierra en rotación.

Gauss amplió este descubrimiento a una extensión del principio de acción mínima de Leibniz. Para Gauss, todas las superficies tenían una curvatura característica, la que a su vez, determinaba cierta trayectoria de acción mínima a la que denominó “geodésica”. Por ejemplo, en un plano, la geodésica es una línea recta, mientras que en una esfera, la geodésica es un gran círculo. En estos dos casos la curvatura es uniforme y, así, la geodésica es la misma en toda la superficie. En contraste, una elipsoide es una superficie de curvatura no uniforme. Por tanto, la geodésica difiere dependiendo de su dirección y posición sobre la superficie (ver **figura 18**).

Para ilustrar esto, tienes que hacer algunos experimentos físicos. Toma un pedazo de papel, una esfera y una masa blanda de espagueti o algún otro objeto de forma irregular. Marca dos puntos en lugares diferentes sobre la superficie, y tiende un hilo entre ellos de forma que quede tenso. El hilo se amoldará de forma aproximada a la geodésica entre los dos puntos. Observa que en un plano la geodésica siempre es una línea recta, mientras que en la esfera siempre es un gran círculo, y en una masa de forma irregular la geodésica cambia de lugar en lugar y de dirección en dirección.

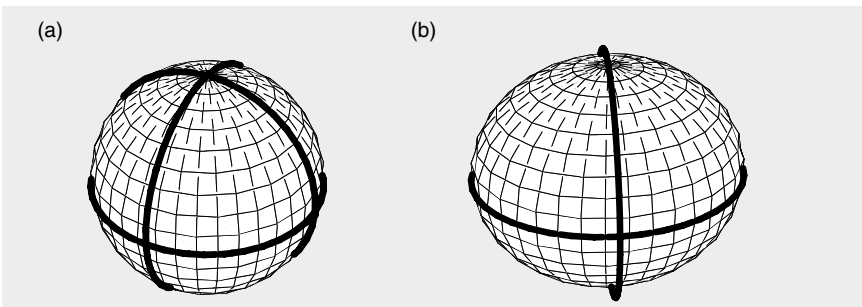
Existe otra distinción entre el plano

FIGURA 17



Para medir la forma de la Tierra, los geodestas comparan los cambios en el ángulo de inclinación de la Estrella Polar, tal como se avista desde diferentes lugares a lo largo del mismo meridiano, con la distancia entre esos mismos lugares sobre la superficie. Los ángulos de inclinación de la Estrella Polar se miden con respecto a la fuerza de gravedad. (a) Sobre una esfera, la fuerza de gravedad siempre se dirige hacia el centro de la esfera y, por tanto, cambios iguales de ángulo corresponden a distancias iguales sobre la superficie. (b) En una elipsoide, la fuerza de gravedad no siempre se dirige hacia el centro. Por consiguiente, cambios iguales de ángulo corresponden a distancias diferentes sobre la superficie. (c) Con mediciones muy precisas, Gauss demostró que la distribución desigual de la masa terrestre de la Tierra provocó que la dirección de la fuerza de gravedad cambiara de forma irregular de un lugar a otro. Esto lo llevó a definir la forma física geométrica que hoy llamamos "geoide".

FIGURA 18



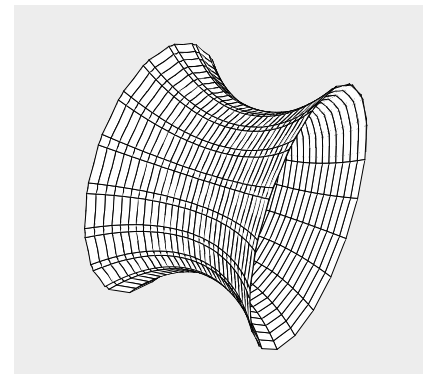
(a) La geodésica en una esfera es un círculo muy grande. (b) La geodésica en una elipsoide varía según la dirección y ubicación.

y la esfera o la elipsoide. En el plano existe una cantidad infinita de trayectorias entre dos puntos cualquiera, pero sólo una de estas trayectorias es una geodésica, es decir, de acción mínima. Esto también ocurre en una esfera o elipsoide, excepto en el caso de que los dos puntos sean los polos; entonces, existe una cantidad infinita de geodésicas entre los dos puntos. La naturaleza limitada

de la esfera y de la elipsoide produce una singularidad respecto a la naturaleza de las geodésicas.

Gauss investigó los principios generales a través de los cuales la curvatura de la superficie determinaba la característica de la geodésica. En este debate, la determinación de un medio para medir la curvatura de la superficie en cualquier punto tiene una pertinencia inme-

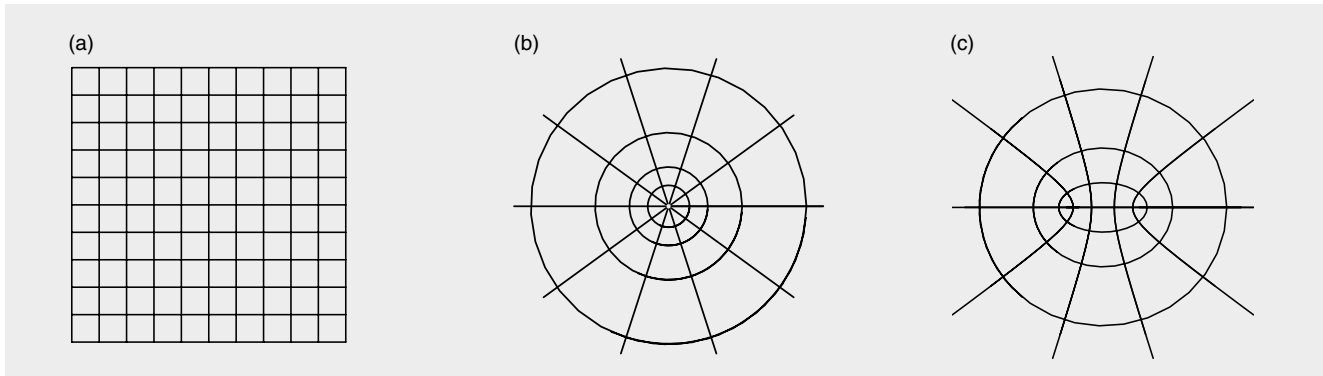
FIGURA 19



Una superficie negativamente curva es aquella en la cual los centros de curvatura mínima y máxima están en diferentes lados de la superficie. Un ejemplo de dicha superficie se forma al rotar una catenaria para formar una "catenoide".

diata. Para nuestros fines, basta ilustrar esto con una demostración física. Dibuja un círculo en la masa colocando una marca en un punto del hilo y haciéndola

FIGURA 20



Riemann amplió la idea de superficies de Gauss a un concepto de multiplicidad más general. Estas multiplicidades podrían investigarse estudiando la forma en que las geodésicas cambian cuando se añaden principios nuevos. (a) Red ortogonal de geodésicas de un plano, en línea recta a espacios iguales. (b) En la transformación que se muestra, las líneas rectas se han convertido en una red ortogonal de círculos y radios: las líneas verticales a espacios iguales se convierten en círculos geoméricamente espaciados, y las líneas horizontales a espacios iguales en radios separados por ángulos iguales. (c) Cuando se aplica el concepto de la catenaria de Leibniz, se produce una red de elipses e hipérbolas.

rotar mientras sostienes la otra punta del hilo en una posición fija. Todos los radios de este círculo son geodésicas en diferentes direcciones. Ahora examina la curvatura de cada geodésica: variarán en cada dirección. Habrá una geodésica que sea la menos curva (de curvatura mínima) y otra que sea la más curva (de curvatura máxima). Inténtalo de nuevo, pero en una superficie diferente, como por ejemplo una masa de nuez con forma de pesas para hacer ejercicio. Los extremos redondeados de la masa de nuez tienen las mismas características que la masa de espagueti, en la que el centro de la curvatura se encuentra siempre dentro de la masa. Sin embargo, algo diferente sucede en medio de la masa. Aquí, el centro de la curvatura está, o dentro o fuera de la masa, dependiendo de la dirección de la geodésica. Gauss denominó a esta característica “curvatura negativa”, y es la característica de la curvatura que expresa una superficie formada, por ejemplo, en una catenaria rotada llamada “catenoide” (ver **figura 19**).

Gauss comprobó que en cualquier superficie, sin importar lo irregularmente curva que sea, ¡las geodésicas de curvatura máxima y mínima siempre formarán ángulos rectos entre sí!

Así, la curvatura de la superficie ex-

presa un principio físico, que a su vez determina la geodésica o trayectoria de acción mínima a lo largo de esa superficie. En el caso de la cúpula de Brunelleschi, era la forma general físicamente determinada de la superficie de la cúpula la que determinaba las curvaturas características, en forma longitudinal, circunferencial y hacia adentro. No obstante, mientras estaba en construcción, la forma general (aun inconclusa) tenía que formarse con las pequeñas modificaciones en las curvaturas longitudinales, circunferenciales y hacia adentro. El uso de la cadena suspendida de Brunelleschi para guiar estos cambios de curvatura en lo pequeño expresa la congruencia entre el principio de la catenaria y las características de acción mínima de la cúpula.

De las superficies a las multiplicidades

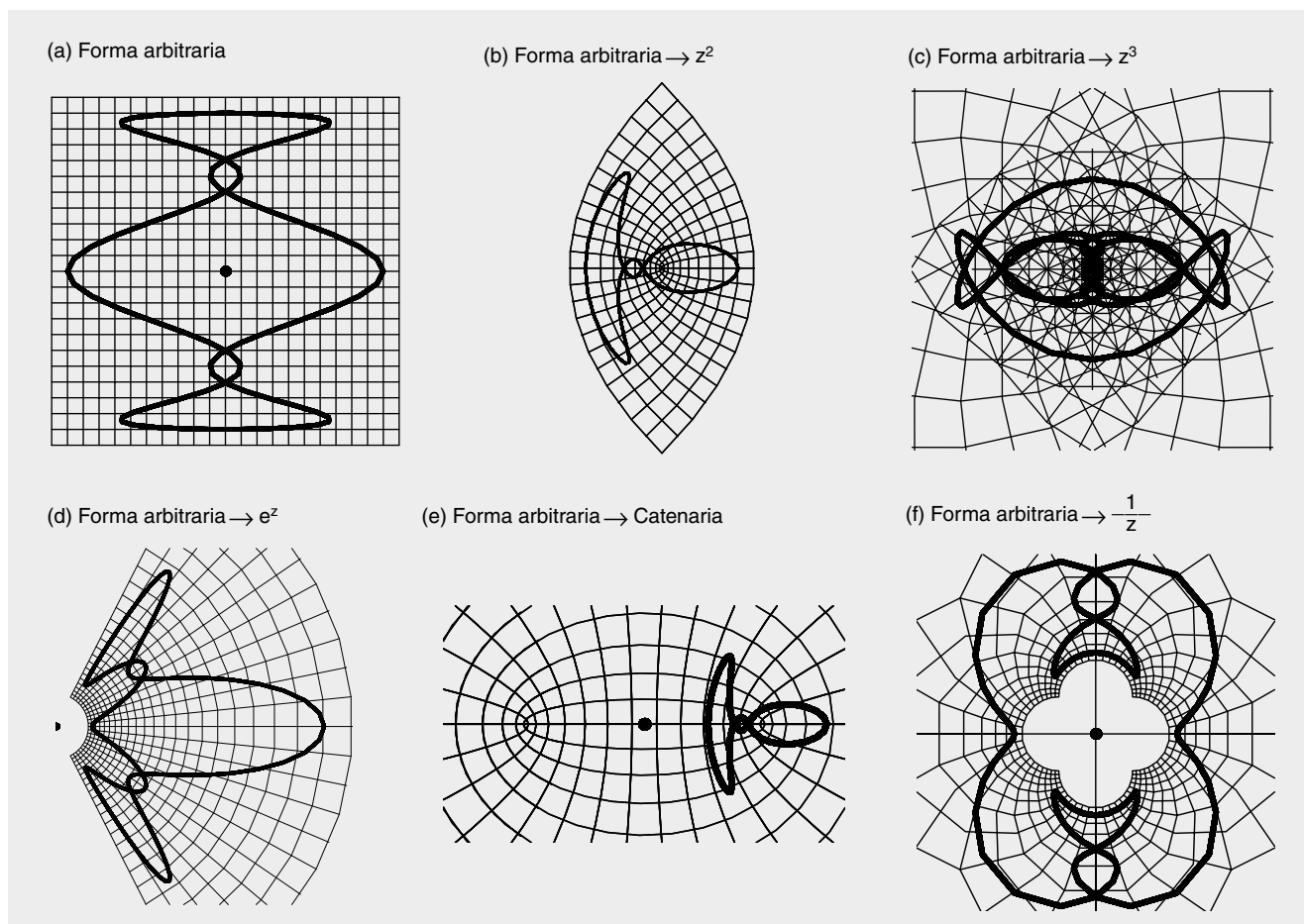
A partir del descubrimiento de Gauss, Bernhard Riemann generalizó este concepto un poco más, a la idea de una geodésica dentro de una multiplicidad de principios físicos universales. Estas multiplicidades, que tienen más “dimensiones” que superficies, no pueden verse de forma directa, pero, al igual que las superficies, sus características pueden conocerse directamente por un

cambio en la geodésica.

Por ejemplo, la luz en la reflexión y la refracción sigue una trayectoria en una superficie, pero cada clase de acción expresa una trayectoria diferente debido a que la multiplicidad física de la refracción implica un principio, al cambiar la velocidad de la luz, que no existe en la multiplicidad de la reflexión. La adición de este nuevo principio a la multiplicidad de acción modifica la geodésica. Y viceversa, cuando se mide un cambio en la geodésica, eso indica la presencia de un nuevo principio físico en la multiplicidad.

Riemann desarrolló los medios para representar estas multiplicidades superiores mediante funciones complejas, a las que en forma metafórica expresó en la forma de superficies. Por ejemplo, las órbitas planetarias en secciones cónicas y la catenaria son trayectorias de acción mínima respecto a la multiplicidad de la gravitación universal. Cada una representa una geodésica respecto a la multiplicidad de la gravitación universal. Sin embargo, esto nos plantea una paradoja: ¿por qué la multiplicidad de la gravitación universal expresa dos clases distintas de geodésicas, secciones cónicas para las órbitas planetarias y catenarias para las cadenas suspendidas? Cuando el principio de la catenaria se expresa

FIGURA 21



Ejemplos de la planimetría de Riemann. Aquí puede observarse una curva cerrada arbitraria con respecto a una multiplicidad de geodésicas cambiantes. La curva mantiene el mismo ángulo respecto a las geodésicas, a medida que éstas cambian de (a) líneas rectas a (b) parábolas, a (c) curvas cúbicas, a (d) círculos y radios, a (e) elipses e hipérbolas, a (f) inversiones. Con cada transformación de la multiplicidad, la acción que representa la curva cambia.

como una función en el dominio complejo de Gauss y Riemann, las órbitas en secciones cónicas son consideradas como una geodésica dentro del principio superior que representa la catenaria (ver **figura 20**).

En las figuras se muestran ejemplos más generales (ver **figura 21**). Éstas ilustran cómo la misma acción, cuando tiene lugar en diferentes multiplicidades, varía por las características de la multiplicidad. Piensa en las redes ortogonales de cada figura como las geodésicas mínima y máxima de cada multiplicidad. En cada caso, la curva mantiene la misma orientación angular con respecto a estas geodésicas. Pero, como las

geodésicas varían de multiplicidad a multiplicidad, la acción cambia. Así, un cambio en los principios que determinan la multiplicidad modifica las geodésicas, las cuales a su vez modifican toda acción en esa multiplicidad. Y viceversa, para efectuar un cambio en cualquier acción física, uno debe actuar para modificar las características de la multiplicidad en la que la acción ocurre.

Ahora mira la cúpula de Brunelleschi desde esta perspectiva. La cúpula es una superficie cuya geodésica, en principio, se amolda a la catenaria. En tanto superficie de acción mínima, expresa una geodésica con respecto al principio de gravitación universal. Respecto a la

multiplicidad de la historia universal, la construcción de la cúpula representó la geodésica de esa cultura moribunda del Imperio Romano al Renacimiento de Oro del siglo 15.

En nuestro lugar actual en la multiplicidad de la historia universal, la creación de la “universidad de combate sobre ruedas” del movimiento de juventudes de LaRouche, y el convertir a LaRouche en Presidente de los Estados Unidos, es, para nosotros, nuestra cúpula de Brunelleschi, la geodésica que va de la Edad Media que hoy amenaza, a un nuevo Renacimiento sin fin.

Traducción de María Pía Cassettari.