Pedagogía

Funciones hiperbólicas: una fuga de 25 siglos

por Bruce Director

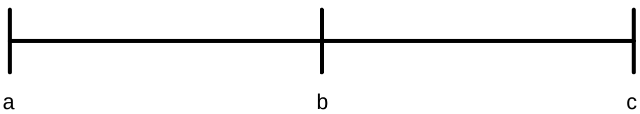
Cuando por el año 370 a.C. un oráculo les ordenó a los delianos hacer más grande el altar de su templo —con forma de cubo—, Platón les dijo que mejor se olvidaran de todas las interpretaciones mágicas del oráculo y se concentraran en resolver el problema de doblar el cubo. Este es uno de los primeros relatos de la importancia de los ejercicios pedagógicos o espirituales para la economía.

Algunas crisis, como la que hoy enfrenta la humanidad, requieren un grado de concentración para resolver las paradojas que han perdurado más de lo que dura una vida humana. Por fortuna, la humanidad está dotada con lo que LaRouche llama "súper genes", que le dan al individuo la capacidad de un poder de concentración superior, al traer al presente los esfuerzos de generaciones pasadas. Una caso ejemplar es el de la tesis doctoral de Bernhard Riemann de 1854, *Sobre las hipótesis que subyacen a los fundamentos de la geometría,* en la que Riemann habla de una oscuridad que envolvió al pensamiento humano desde Euclides hasta Adrien–Marie Legendre. Tras más de 2.000 años de concentración en la materia, Riemann, apoyándose en su maestro Carl F. Gauss, develó esa oscuridad al desarrollar lo que llamó "un concepto general de magnitud múltiplemente extendida".

Bruce Director, autor de este artículo, da una clase sobre las catenarias a miembros del Movimiento de Juventudes Larouchistas.

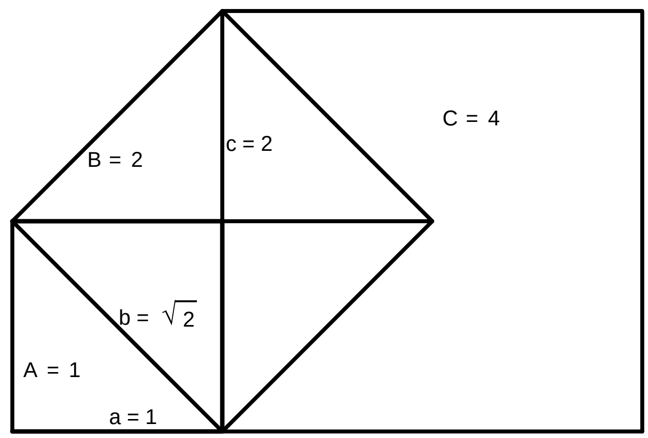
El concepto de Riemann amplió los descubrimientos que ya había hecho Gauss, empezando con su disertación de 1799 sobre el teorema fundamental del álgebra. Como su predecesor, es una devastadora refutación de los métodos de "torre de marfil" de Leonhard Euler, Louis de Lagrange, etc., que hoy dominan la forma de pensar de la mayoría de la población, tal como dominaron la mente de los delianos y otros desafortunados griegos en la época de Platón. Al reconocer que todos los problemas de la sociedad en última instancia eran subjetivos, Platón prescribió (en *La República*) que ese dominio de los ejercicios pedagógicos (en los campos de la música, la geometría, la aritmética y la astro-

FIGURA 1a
La media aritmética



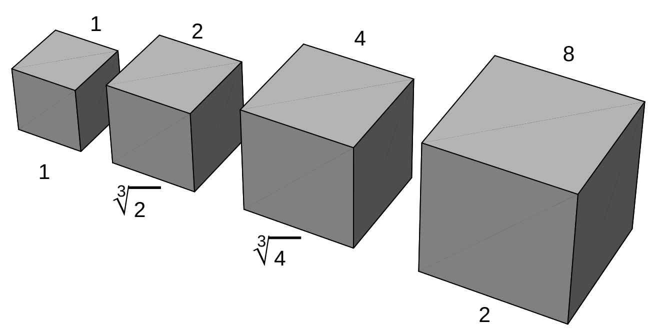
b *es la media aritmética entre* a *y* c.

FIGURA 1b
La media geométrica



La longitud b *es la media geométrica entre las longitudes* a *y* c. *El área* B *es la media geométrica entre las áreas* A *y* C.

FIGURA 1c
Dos medias geométricas entre sólidos



Las dos medias geométricas entre un cubo de arista 1 y volumen 1 y un cubo de arista 2 y volumen 8. Proporcionalmente, habrá dos medias geométricas entre un cubo de volumen 1 y un cubo de volumen 2.

nomía) fuera un prerrequisito para ejercer el liderato político. Las crisis, como la que ahora enfrentamos (o la que enfrentaron los delianos), sólo podían superarse si los líderes desarrollaban la capacidad de liberarse a sí mismos, y después a otros, de sus falsas etiquetas.

Estos ejercicios acostumbran a la mente a tornar su atención, de las sombras de la percepción sensorial, al descubrimiento de verdades cognoscibles, aunque invisibles, que el dominio de los sentidos nos refleja como paradojas. El proceso no tiene fin, con cada nuevo descubrimiento surgen nuevas paradojas que dan pie a más descubrimientos, produciendo una concentración siempre mayor de la condición mental necesaria que produjo el descubrimiento en primer lugar.

Doblando la línea, el cuadrado y el cubo

Tal es el marco para concentrarse en los 2.500 años de investigación sobre las paradojas que el problema de doblar la línea, el cuadrado y el cubo plantearon inicialmente. A la vista, estos objetos parecen similares. El cuadrado se hace con líneas, mientras que el cubo lo componen cuadrados. Pero cuando estos objetos se someten a una acción, tal como el doblarlos, queda claro que aunque estos objetos parecen visualmente similares, su principio generador es muy diferente.

Los pitagóricos, que, como se sabe, aprendieron de los egipcios, fueron los primeros griegos en investigar esta paradoja. Al reconocer que todos estos objetos visualmente similares, pero cognosciblemente diferentes, están contenidos en un solo universo, buscaron un principio unificador que subyace en la generación de los tres. Ese principio unificador no podía observarse de forma directa, pero sí podía conocerse su existencia a través de su expresión, en la forma de una paradoja, buscando entre las sombras visibles.

Casi 80 años antes de que Platón reprendiera a los delianos, Hipócrates de Cos ofreció una noción basada en el principio pitagórico de la conexión entre la música, la aritmética y la geometría. Los pitagóricos reconocieron las relaciones entre los intervalos musicales, a las que llamaron: la aritmética y la *geométrica*. La media aritmética es diferencia en común de tres números: b–a = c–b. Por ejemplo, 3 es la media aritmética entre 1 y 5 (ver **figura 1a**). La media geométrica es cuando 3 números están en proporción constante: a:b::b:c. Por ejemplo, 2:4::4:8 (ver **figura 1b**)

Hipócrates reconoció que la relación aritmética la expresan los intervalos formados al agregar las líneas, y que la geométrica la expresan los intervalos creados al agregar cuadrados o, más en general, áreas. La formación de figuras sólidas, puesto que son de un poder superior, no corresponde directamente a ninguna de estas relaciones musicales. Sin embargo, la sombra proyectada al doblar el cubo, expresaba una relación que correspondía a encontrar dos medias geométricas entre dos extremos (ver **figura 1c**).

Platón explica en el *Timeo* la importancia de la noción de Hipócrates:

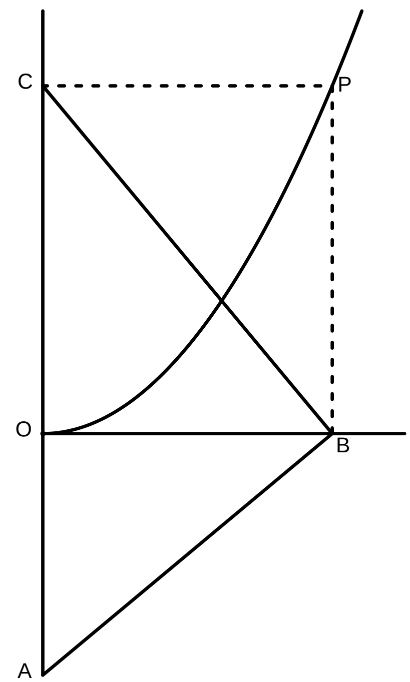
“Ciertamente, lo generado debe ser corpóreo, visible y tangible. . . Pero no es posible unir bien dos elementos aislados sin un tercero, ya que es necesario un vínculo en el medio que los una. . . Si el cuerpo del universo hubiera tenido que ser una superficie sin profundidad, habría bastado con una magnitud media que se uniera a sí misma con los extremos; pero en realidad, convenía que fuera sólido y los sólidos nunca son conectados por un término medio, sino siempre por dos.”.

En el *Epinomis,* Platón habla de las investigaciones de las medias geométrica y aritmética: “Algo divino y maravilloso es aquello que se contempla y que refleja cómo la totalidad de la naturaleza está impresa con especies y géneros de acuerdo a cada proporción como un poder. . . Para el hombre que realiza sus estudios de la forma adecuada, todas las construcciones geométricas, todos los sistemas numéricos, todas las progresiones melódicas debidamente constituidas, el sistema ordenado de las revoluciones celestes, deberían revelarse a sí mismos, y lo harán, si, como digo, un hombre hace sus estudios con la mente fija en un solo propósito. Como tal hombre lo refleja, recibirá la revelación de un simple lazo de interconexión natural entre todos estos problemas. Si maneja tales materias con otro espíritu, un hombre, como digo, necesitará invocar a su suerte. Debemos dejar sentado que, sin estas capacidades, la felicidad no llegará a ninguna sociedad; este es el método, este es el pábulo, estos los estudios exigidos; difícil o fácil, este es el camino que tenemos que seguir”.

Mientras que la reacción inicial al planteamiento de Hipócrates fue que convirtió un rompecabezas imposible en otro, otros lo vieron como un flanco. Si la construcción de dos medias entre dos extremos puede realizarse “entre las sombras”, el resultado puede aplicarse al problema de doblar el cubo. Un colaborador de Platón, Arquitas de Tarento, brindó una solución con su famosa construcción, que involucra un cilindro, un toro y un cono (ver **figura 4a**). Esto demostró que la construcción requerida sólo puede hacerse, no en el dominio plano de las sombras, sino en el dominio superior de las superficies curvas. El resultado de Arquitas es consistente con el descubrimiento de los pitagóricos, de Teetetes y de Platón de la construcción de los cinco sólidos regulares a partir de la esfera.

FIGURA 2a

La proporciones de una parábola



La parábola la forma el ángulo móvil ABC, *tal que el vértice* B *se mueve sobre la línea* OB *en tanto* C *se mueve sobre la línea* OC. *Esto forma el rectángulo cambiante* OBPC. *El punto* P *describe una parábola. Mediante triángulos similares,* OA:OB::OB:OC *o* $OC = OB^2$.

El descubrimiento de Menecmo

Un alumno de Platón, Menecmo, hizo un descubrimiento adicional al demostrar que las curvas generadas a partir de conos tienen el poder de producir dos medias entre dos extremos. Como lo ilustran los diagramas, la parábola tiene la característica de ser una media entre dos extremos, mientras que la hipérbola abarca dos (ver **figuras 2a** y **2b**). Menecmo demostró que la intersección de una hipérbola y una parábola produce el resultado de situar dos medias entre dos extremos (ver **figura 3**).

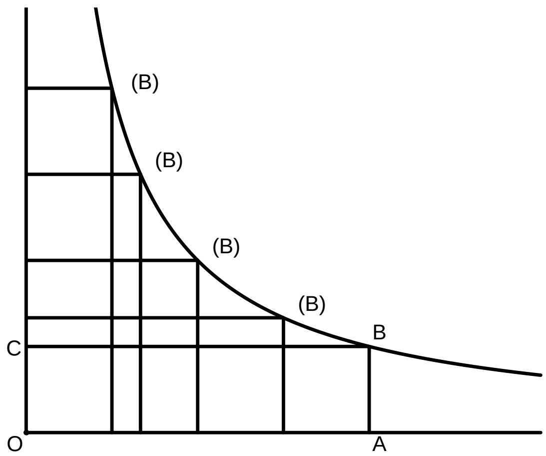
En los descubrimientos de Arquitas y Menecmo había un principio que no florecería del todo sino hasta 2.200 años después, con los descubrimientos de Riemann y Gauss. La solución de Arquitas dependía de una característica de la curva formada por la intersección del cilindro y el toro. Esta curva no podría dibujarse en una superficie plana, porque se curva en dos direcciones (ver **figuras 4a** y **4b**).

Más tarde Gauss definiría esta característica como curvatura “negativa”.

Sin embargo, Menecmo hace su construcción —que usa una parábola y una hipérbola— enteramente en el dominio plano de las sombras. Aunque por razones que no serían claras sino hasta la época de Godofredo Leibniz en el siglo 17, la solución de Menecmo funcionó porque involucraba el mismo principio de curvatura negativa que la de Arquitas.

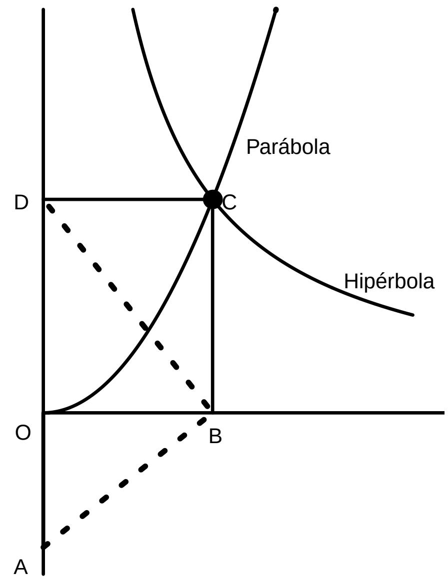
Como casi no hay escritos originales, es difícil saber qué tan conscientes estaban estos antiguos investigadores griegos del principio que Gauss llamaría curvatura negativa. Lo que sí sabemos, es que estos griegos sabían que el principio que determina la acción en el universo físico es superior al que domina el mundo plano de las áreas. Así, los principios que gobiernan a los objetos sólidos dependen de curvas, generadas por un tipo de acción superior en el espacio, el cual, cuando se proyecta en el dominio inferior de un plano, tiene la capacidad de situar dos medias entre dos extremos. Estas curvas combinan la aritmética y la geométrica en una sola. Cuando este principio se aplica al dominio superior de los objetos

FIGURA 2b
Las proporciones de una hipérbola



La hipérbola la forma la esquina B *del rectángulo* OABC. *En tanto los lados del rectángulo cambian, el área permanece constante. Esto mantiene la proporción* 1:OA::OA:OAxAB.

FIGURA 3
Determinación de Menecmo de dos medias usando secciones cónicas



La intersección de una hipérbola y una parábola determina las magnitudes que doblan el cubo. La parábola la forman OA = 1 *y el ángulo recto* ABD. *La hipérbola la forma* OC^2 *del rectángulo* OBCD, *que tiene un área de 2. En la parábola,* OA:OB::OB:OD, *o* 1:OB::OB:OC^2. *En la hipérbola,* OBxBC = 2. *De la combinación de las dos anteriores se desprende la proporción,* 1:OB::OB:BC::BC:2. *En otras palabras, la línea* OB *formará la arista de un cubo de volumen 2 y* BC *formará la arista de un cubo de volumen 4.*

sólidos, produce un resultado experimentalmente validable.

Esto demuestra, como Platón señala, no sólo un principio que gobierna al reino físico, sino la relación múlticonexa entre las dimensiones espiritual y material del universo; de ahí lo apropiado de los *ejercicios pedagógicos* o *espirituales.*

El estudio de Kepler de las secciones cónicas

El siguiente avance significativo lo hizo Johannes Kepler, quien estableció la ciencia física moderna como una extensión de estos antiguos descubrimientos griegos, tal como Nicolás de Cusa, Luca Pacioli y Leonardo da Vinci los redescubrieron. Kepler, citando a Cusa, a quien llamó "divino", dio una particular importancia a la diferencia entre la curva (geométrica) y la recta (aritmética). Kepler escribió en su *Mystérium Cosmográphicum:*

"Pero, después de todo, ¿por qué las distinciones entre la curva y la recta, y la nobleza de una curva, en la intención de Dios cuando creó el Universo? ¿Precisamente por qué? Salvo que para el Creador más perfecto fuera absolutamente necesario crear la más bella obra".

Como parte de su investigación astronómica, Kepler dominó *Las Cónicas* de Apolonio, que es una compilación de los descubrimientos griegos sobre estas curvas superiores. Como resultado de su investigación sobre la refracción de la luz, Kepler aportó un concepto nuevo y revolucionario de las secciones cónicas. Por primera vez, Kepler consideró a las secciones cónicas como una multiplicidad proyectiva:

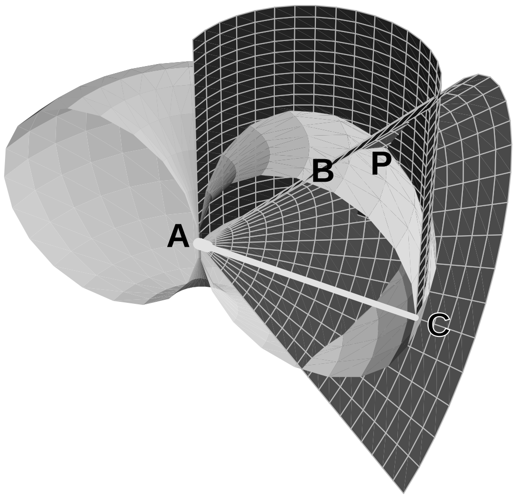
"Entre estas líneas existe el siguiente en razón de sus propiedades: pasa de la línea recta, a través de una infinidad de hipérbolas, a una parábola, y de ahí, a través de una infinidad de elipses, al círculo. Así, por un lado la parábola tiene dos cosas en naturaleza infinitas, la hipérbola y la línea recta, la elipse y el círculo. Aunque también es infinito, asume una limitación en el otro lado. . . Por tanto, los límites opuestos son el círculo y la línea recta: el primero es curvatura pura, la última recta pura. La hipérbola, la parábola y la elipse están en medio, y participan de la recta y de la curva, lo mismo la parábola, y la hipérbola participa más de la recta, y la elipse más de la curva" (ver **figura 5**).

La discontinuidad que revela esta proyección entre la parábola y la hipérbola es importante para esta discusión. La hipérbola está al otro lado del infinito, por así decirlo, de la elipse y el círculo, mientras que un lado de la parábola va hacia el infinito y el otro hacia el finito.

De Fermat a Gauss

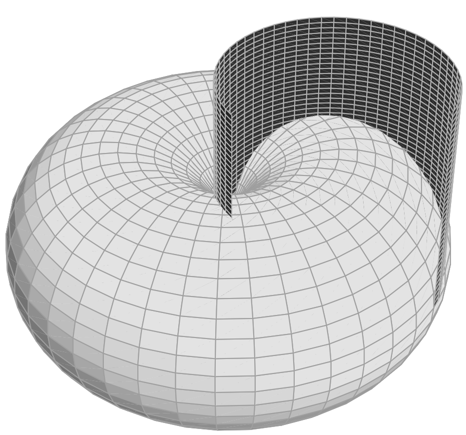
La importancia de estos límites infinitos comienza a aclararse desde la perspectiva de la reformulación de *Las Cónicas* de Apolonio por parte de Pierre de Fermat, y el desarrollo subsiguiente del cálculo por Leibniz y Jean Bernoulli, con un aporte crucial de Christian Huyghens.

FIGURA 4a
Construcción de Arquitas para doblar el cubo



Arquitas desarrolló una construcción para encontrar dos medias geométricas entre dos magnitudes. La longitud mayor es AC*, que es el diámetro de un círculo. Ese círculo rota alrededor de* A *para formar un toro. Entonces se produce un cilindro perpendicular al toro, cuyo diámetro también es* AC*. La magnitud menor* AB *es una cuerda de una sección transversal del toro.* AB *se extiende hasta que interseca al cilindro, formando un triángulo que, al girar, produce un cono. Las tres superficies intersecan en el punto P.*

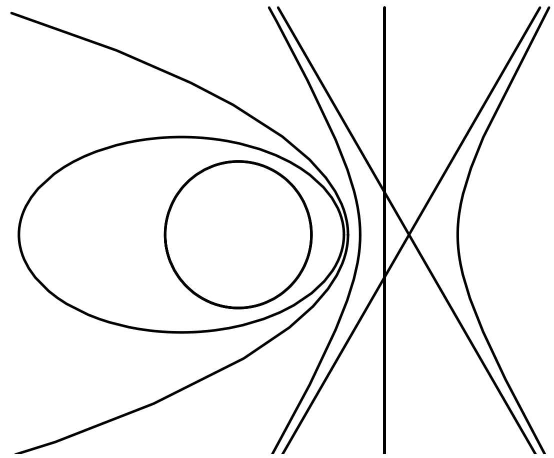
FIGURA 4b
Intersección de un cilindro y un toro



La curva que forma la intersección de un cilindro y un toro posee una característica que Gauss llamó curvatura "negativa".

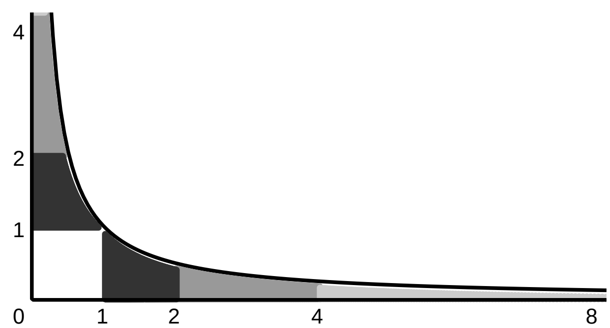
Huyghens reconoció que la curva y la recta se expresan en la hipérbola de forma diferente que en las otras secciones cónicas. Su descubrimiento se basó en el mismo principio

FIGURA 5
Concepto proyectivo de Kepler de las secciones cónicas



En tanto el foco se mueve a la izquierda, el círculo se transforma en una elipse. En el límite con el infinito, la elipse se convierte en una parábola. La hipérbola se forma "del otro lado" del infinito.

FIGURE 6
Áreas hiperbólicas iguales

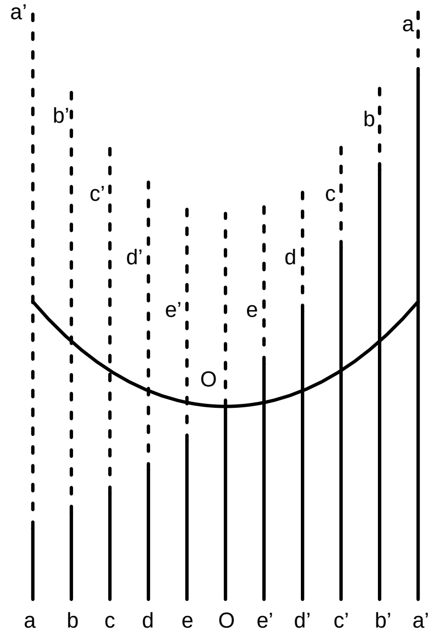


Las áreas entre 1 y 2, 2 y 4, y 4 y 8, son todas iguales.

que reconoció Menecmo, de que a la hipérbola, cuando se proyecta sobre un plano, la forma una serie de rectángulos cuyas áreas son siempre iguales. En la medida en que uno de los lados de cada rectángulo se hace más largo, el otro lado se vuelve inversamente más pequeño. Huyghens centró su atención en el área que encierran la hipérbola y la asíntota, que es la que forma un rectángulo en cambio contante, cuya área siempre es la misma (ver **figura 6**). Las áreas entre la hipérbola y la asíntota, formadas por rectángulos cuyos lados están en proporción son iguales. Del mismo modo, como ilustra el diagrama, aquellas secciones de la hipérbola formadas

FIGURA 7

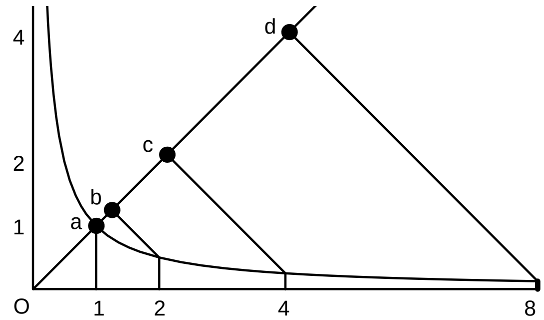
Construcción de Leibniz de la catenaria



La catenaria la forma la media aritmética entre dos curvas, a la que Leibniz llamó "logarítmica" y que hoy se conoce como exponencial. En la figura, las líneas están igualmente distribuidas sobre un eje horizontal. La curva "logarítmica" la forman las longitudes verticales que están en proporción geométrica. OO = 1; $e' = OO^2$ *y* $e = 1/OO^2$; $d' = OO^3$ *y* $d = 1/OO^3$, *etc. La catenaria se forma sumando la longitud e a la e′, y dividiendo la longitud combinada entre 2, etc. Los puntos de la catenaria son iguales a* $(OO^n + 1/OO^n)/2$.

FIGURA 8a

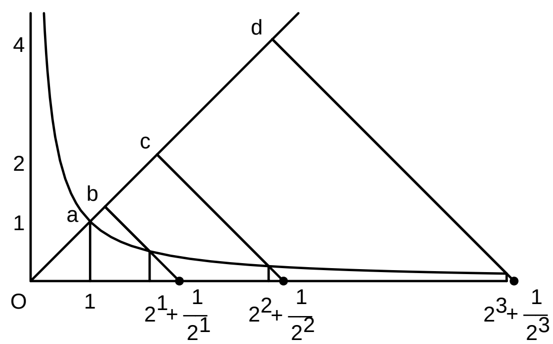
Proyección de áreas hiperbólicas iguales



Los puntos sobre la hipérbola que corresponden a divisiones iguales del área se proyectan sobre el eje al dibujar líneas perpendiculares desde el eje hasta esos puntos. Esto produce las longitudes, Ob, Oc, Od. Oa = 1.

FIGURA 8b

Medición entre la hipérbola y la catenaria



Cuando las líneas perpendiculares al eje se extienden hasta intersecar la asíntota, producen las longitudes $(2^n + 1/2^n)$. *Por inversión, las longitudes correspondientes sobre el eje son proyecciones de estas longitudes en un ángulo de 45 grados. Por tanto, las longitudes* Ob, Oc *y* Od *son iguales a* $(2^n + 1/2^n)/2$.

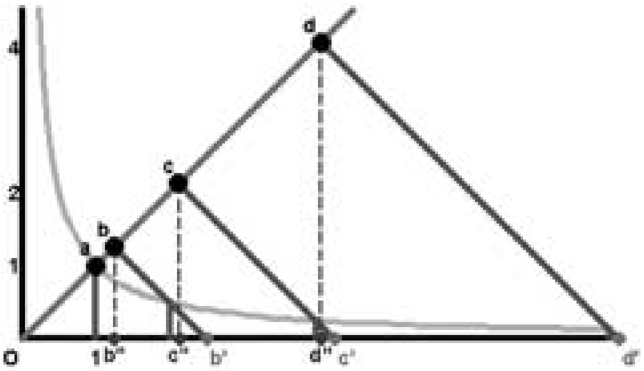
en tanto la distancia entre la asíntota y el centro aumenta geométricamente, son iguales. Por tanto, mientras las áreas crecen aritméticamente, las longitudes sobre la asíntota lo hacen geométricamente. No pases por alto la ironía de esta inversión: ¡en la hipérbola, las áreas (geométricas) crecen de forma aritmética, mientras que las longitudes (aritméticas) lo hacen de forma geométrica!

Leibniz descubrió que a esta relación combinada de la aritmética y la geométrica la expresa el principio físico de la catenaria. Leibniz demostró que a la catenaria la forma una curva, que él llamó *logarítmica*, conocida hoy como "exponencial". Esta curva esta formada de tal modo que el cambio horizontal es aritmético, mientras que el cambio vertical es geométrico. Leibniz demostró que la catenaria es la media aritmética entre dos curvas logarítmicas tales (ver **figura 7**).

De aquí, pasamos directamente al descubrimiento de Gauss y Riemann, a través de otros descubrimientos de Leibniz y Bernoulli relacionados con la catenaria: la relación de la catenaria con la hipérbola.[1] Esta relación se forma a partir del descubrimiento de Huyghens. Las áreas hiperbólicas iguales definen ciertos puntos sobre la hipérbola que se "proyectan" sobre su eje, mediante líneas perpendiculares que van desde el eje hasta esos puntos. Estas proyecciones producen longitudes sobre el eje, como demostró Leibniz, ¡del mismo largo que las que produce la catenaria! (ver

1. Cabe señalar que este descubrimiento ha sido víctima del difundido asalto de Euler y Lagrange, mismo que Felix Klein y demás perpetuaron en el siglo 20, y la mera discusión de esto con cualquiera expuesto a una educación matemática académica de seguro provocará graves ataques de ansiedad.

FIGURA 8c
Relación entre la hipérbola y la catenaria



Cuando los puntos a, b, c *y* d *se proyectan hasta la asíntota, forman las longitudes* a″ = 1; b″ = $(2^1 + 1/2^1)/2$; c″ = $(2^2 + 1/2^2)/2$; d″ = $(2^3 + 1/2^3)/2$.

figuras 8a, 8b y **8c**).

Las implicaciones de este descubrimiento quedan más claras cuando las vemos desde la perspectiva de la investigación de Gauss sobre las superficies curvas, que surge de su trabajo previo sobre geodesia, astronomía, el teorema fundamental del álgebra y los residuos bicuadráticos. Para completar esta discusión, concentrate en la ampliación de Gauss de la investigación sobre las curvas, a la investigación de las superficies que las contienen. A las superficies que contienen curvas con las características de la hipérbola o la catenaria, Gauss las llamó curvas “negativas”, mientras que las superficies formadas por curvas con las características de los círculos y las elipses, las llamó curvas “positivas”

FIGURA 9a
Curvatura negativa: la catenoide

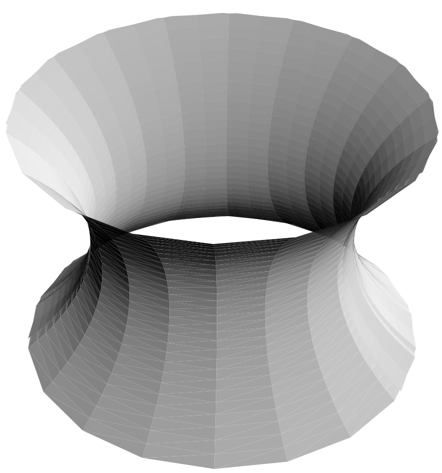
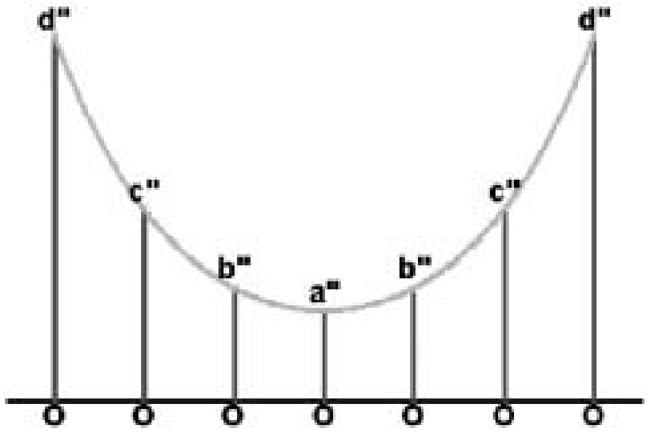


FIGURE 8d
Relación entre la hipérbola y la catenaria



Cuando las longitudes de la hipérbola, Oa″, Ob″, Oc″, Od″, *se distribuyen sobre una línea a intervalos regulares, sus extremos forman la catenaria.*

(ver **figuras 9a** y **9b**).

Ahora, vuelve a pensar en esta fuga de 25 siglos. El principio que subyace en las construcciones de Arquitas y Menecmo; la discontinuidad que expresa el límite infinito entre la hipérbola y la parábola; la inversión de la geométrica y la aritmética en la hipérbola: desde la perspectiva de Gauss, todo esto refleja una transformación entre la curvatura positiva y la negativa.

Por tanto, para investigar la acción en el universo físico, es necesario ampliar la investigación, de la simple extensión a una curvatura, y de las simples curvas a las superficies que las contienen. Esto sólo puede hacerse desde la perspectiva del dominio complejo de Gauss y Riemann.

FIGURA 9b
Curvatura positiva: la elipsoide